

焦鹏飞, 李亮, 赵骥. 压缩感知在医学图像重建中的最新进展[J]. CT 理论与应用研究, 2012, 21(1): 133-147.
Jiao PF, Li L, Zhao J. New advances of compressed sensing in medical image reconstruction[J]. CT Theory and Applications, 2012, 21(1): 133-147.

压缩感知在医学图像重建中的最新进展

焦鹏飞, 李亮[✉], 赵骥

清华大学 a. 工程物理系; b. 粒子技术与辐射成像
教育部重点实验室, 北京, 100084

摘要: CS 理论是一种新兴的信号获取与处理理论, 通过减少信号重建所需的数据 (少于奈奎斯特定理所要求的最小数目), 来缩短信号采样时间, 减少计算量, 并在一定程度上保持原有图像的重建质量。由于该理论的这些显著优点, 使得其在医学成像领域引起了广泛关注, 取得了很大进展。本文介绍了压缩感知理论在医学成像中的发展历程和最新进展, 详细介绍一种基于字典学习的新型压缩感知自适应重建算法, 最后通过计算机模拟实验对该方法进行了初步验证。

关键词: CS 理论; 医学成像; 图像重建; 字典学习; K-SVD

文章编号: 1004-4140 (2012) 01-0133-15 中图分类号: TP 391. 41 文献标识码: A

压缩感知 (或压缩传感, Compressive Sensing、Compressed Sensing、Compressed Sampling, CS) 是一种新兴的信息获取与处理理论, 近年来被应用于医学图像重建算法的改进, 效果非常显著。相比于传统医学图像重建算法, 基于 CS 的图像重建算法能够用更少的数据获取高质量的重建图像, 这很好地满足了加快医学成像速度、减少照射剂量的发展需求。因此, CS 理论的应用成为了医学图像重建领域的研究热点。

本文主要介绍 CS 理论在医学成像中的最新进展, 并重点介绍一种基于字典学习的新型 CS 自适应重建算法, 最后通过计算机模拟实验对该方法进行了初步验证。

1 CS 理论介绍

近年来, 由 Candès、Tao 和 Donoho^[1-3]等提出了一种新的信息获取与处理理论, 即 CS。传统的信号采样及重建方法服从奈奎斯特-香农定理: 只有当采样速率信号中最大频率达 2 倍以上时, 才能精确恢复出原有信号。现实生活中的信号往往具有较宽的频带, 为了高保真地记录信号, 需要足够高的信号采样速率, 这不仅增加了系统硬件的要求, 同时为了处理和存储数据, 对软件也提出了更高的要求。因此, 一方面为了满足采样需求而开发更快、更精密的硬件设备, 另一方面为了存储飞速增长的海量数据不得不研究各种压缩方法去除采样信号中的冗余; 这对矛盾已经成为很多科研和工程领域的突出问题。

CS 理论基于对信号先验知识的理解和利用, 使得通过远少于奈奎斯特-香农定理要求的采样数据实现信号准确恢复成为可能。CS 理论的应用大大减少了信号的采样数据量, 并且降低了后续的数据传输、处理和存储量。因此, 该理论一经提出, 就在信息论领域以及其

收稿日期: 2011-09-30。

基金项目: 国家自然科学基金 (10905030, 60871084); 北京市自然科学基金资助项目。

他多个相关应用领域（例如医学成像）引起了广泛关注，国内外大量学者致力于 CS 理论及其应用的研究，发展出了多种细分理论，例如分布 CS 理论^[4-5]，1 比特 CS 理论^[6]，贝叶斯 CS 理论^[7]等，成为信号重建领域的一大研究热点。

随着 CS 理论的深入研究，各国学者提出了多种 CS 理论的应用方式。2006 年赖斯大学（Rice University）的 Takhar 等^[8-9]提出了一种单像素照相机的设想，利用一个数字微镜头来执行图像（图像是伪随机二进制形式的）的线性光学计算。当采样像素数量少于图像像素的数量时，该相机能够获取具有一个单独探测元素的图像。这种照相机结构具有良好的通用性、鲁棒性、可测量性、渐进性和计算的不对称性。这个系统最大的优点在于，由于它只依靠一个单独的光探测器，所以能够适应各种波长的图像，而这是传统的 CCD 和 CMOS 无法做到的。Wakin 等^[10]研究了基于 CS 理论的视频压缩方法，提出了一种基于新式数字图像/视频照相机的方法，可以直接获取随机映射。2007 年 Haupt 等^[11]提出网络数据的压缩感知的设想，对于分布范围较广的数据源和它们的存储、传输和恢复做了深入的探讨和研究，改善了无线传感器网络的数据收集和传输。

国内对于 CS 理论的研究起步晚一些，但近年来国内学者对 CS 理论及其相关应用技术的研究进展很快，并取得了一些突出的成绩。练秋生等^[12]在基于 CS 和代数重建法的 CT 图像重建方法方面做出了贡献；刘长红等^[13]在基于 CS 的手写字符识别方法上取得了进展，实验结果表明该方法具有很好的噪声鲁棒性；李波等^[14]对于基于 CS 理论的数据恢复进行了深入研究，实验结果表明，该方法具有明显高于传统压缩方法的压缩比，并可以得到更小的压缩误差；傅迎华^[15]研究了 CS 的重构算法与近似 QR 分解，对测量矩阵做出了改进，并在实验中验证了这种改进能够产生良好的重建结果。杨海蓉等^[16]提出的 MBOMP 最优化算法，在性能上明显优于传统 OMP 算法。刘凤霞等^[17]在基于稀疏表示的纹理识别方面有深入的研究。李德荣等^[18]对于高斯光束及其角散在成像中的应用做了重点研究并取得了很大的进展。刘丹华等^[19]积极探索了基于 CS 理论的图像多描述编码方法的应用。此外，国内多位学者对 CS 理论在国内的普及和发展推动也做出了贡献^[20-22]。

2 CS 理论在医学图像重建中应用的新进展

近来，国外学者在医学成像方面又取得了一些新的进展，CS 理论广泛地应用于各类医学成像技术，显著改善了 MRI 和 CT 成像的多项重要指标。本文的这一部分主要介绍医学成像方面一些最新的研究成果，这些研究成果都在不同程度上应用了 CS 理论，具体算法请参阅文献[23-37]。

2.1 核磁共振（MRI）血管造影成像

Çukur 等^[23]将 CS 理论应用于核磁共振血管造影成像，同时利用信号补偿方法，从而有效地降低了图像重建中的噪声水平。

众所周知，CS 理论的应用主要满足下述三个条件：①信号具有可压缩性，②由欠采样造成的伪影在变换域中具有非相干性，③重建结果与采样数据具有良好的一致性。而血管造影的信号具有很高的可压缩性，能够很好地满足①；在相位编码平面使用可变密度随机欠采样方法，可以满足②；通过 Çukur 等采用的无约束非线性优化，可以满足③：

$$\min \| \mathbf{W} \cdot (F_u m - H \cdot Y) \|_2 + \lambda_1 \| m \|_1 + \lambda_2 TV(m) \quad (1)$$

其中, 第一项表示重建结果与补偿后的 k 空间数据之间的差别, 称数据一致项, W 代表权重, $F_u m$ 表示重建结果, $H \cdot Y$ 表示补偿后的 k 空间数据。后两项为正规化项, m 代表图像。由于重建仅在相位编码维度进行, 所以 F_u 表示局部傅立叶变换。上式可以给出变换矩阵系数的最大似然估计, 满足一致性约束条件。

当感兴趣区域 (Region of Interest, ROI) 具有比背景组织更高的空间频率时, 该方法能够显著提高图像对比度。

2.2 加速动态核磁共振成像

2011 年, Lingala 等^[24]提出了一种根据欠采样的 $k-t$ 空间数据来重建动态核磁共振图像的新方法, 该方法利用了稀疏性和低阶结构。与基于电影核磁共振成像 (cine MRI) 的传统方法不同, 这种新方法在 KL 变换域中用紧凑表示 (compact representation) 来处理数据, 从而能够利用数据集内部的相关性。KL 变换使该方法可用于多种动态成像问题。即使成像对象的运动是非周期性的, 该方法也能获得良好的重建结果。

通过同时确定全部测量数据的时间基函数和空间权重, 本方法可以在一系列的加速中得到高质量的重建结果。利用体素的时域剖面线之间的相关性, 这种方法可以加速动态核磁共振成像, 将对基和信号的估计转化为一个低阶矩阵的恢复问题, 从而获得对时间基函数更准确的估计, 得到高质量的重建结果。

2.3 快速三维 MRI 图像重建

Montefusco 等^[25]提出了一种基于 CS 理论的快速三维 MRI 重建方法, 该方法可以用较少的频率采样数据得到高分辨率体重建图像。现有三维 MRI 重建主要是利用了图像序列的时空相关性, 在重建中使用适当的约束条件来获得重建结果。而 Montefusco 等提出的新方法利用了体积图像的梯度稀疏性, 从而能够把几种现有方法结合起来, 并据此将图像重建问题转化为有约束的三维最小化问题。通过利用基于前向后向算子分裂的惩罚逼近算法, 可以确保迭代求解过程的收敛性。考虑到测量数据中包含一系列傅立叶域二维数据, 该方法构建了一个二维-三维混合约束的最小化问题, 其近似解由求解一系列三维全变换 (TV) 正则化子问题得到。具体的迭代过程包含两步: ①更新过程, 这一过程要求更新结果与测得数据的连续性相一致; ②时域三维滤波, 这一步利用了图像序列的时空相关性。由此得到的 NFCS-3D 算法适用于多种医学图像重建问题, 即使在高度欠采样条件下, 也可以快速稳定地得到良好的重建结果。

2.4 部分并行 MRI 图像重建的加速技术

虽然 CS 理论在 MRI 成像领域已经取得了诸多进展, 但是其图像重建速度一直较慢, Ye 等^[26]提出了一种快速数值方法, 用于加速求解基于全变换和 l_1 范数约束条件的如下图像重建问题:

$$\min \left\{ \alpha \| u \|_{TV} + \beta \| \Psi u \|_1 + \frac{1}{2} \| Au - f \|_2^2 \right\} \quad (2)$$

其中, $u \in C^N$ 表示重建图像, N 表示图像的像素数。 α 和 β 表示相对权重。 A 是投影矩阵, 由成像设备和数据获取方式决定。 $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N) \in C^{N \times N}$ 通常是一个正交矩阵, 可以将重建图像 u 稀疏化。该算法用变量分裂方法 (variable splitting method) 减少计算量, 用谱梯度方法 (Barzilai-Borwein) 来获得最优步长从而加快收敛速度。

2.5 基于统计和 CS 理论的内部 CT

最近几年, 内部 CT 成像成为 CT 研究的新热点^[27-29], 从 2007 年开始, Wang 等人陆续发现当 ROI 完全位于物体内部时, 如果能够满足下面任一条件, 就可以实现 ROI 的精确重建: ①在 ROI 内部有一小区域, 其 CT 图像已知; ②ROI 区域内的图像为分段常数或其分段有限阶导数为常数^[30-33]。现有的内部 CT 重建主要分为基于 POCS 迭代和基于 TV 约束的两类方法, 而 Xu 等^[34]提出了同时基于噪声统计模型和 TV 约束的内部 CT 重建方法, 充分考虑了局部投影数据的噪声统计特性, 将核医学成像经常使用的统计方法和 CS 约束结合到一起, 用于内部 CT 图像重建, 然后利用交替最小化方法实现最终的最优化处理。该方法可以显著提升低剂量条件下的内部 CT 图像重建质量。

2.6 扩散光层析图像重建技术

扩散光层析技术 (Diffuse Optical Tomography, DOT) 是新近兴起的一种生物医学无损成像方法, 可用于体内组织和血氧水平的实时成像探测, 具有灵敏度高、计算量小的特点。但由于光在传播过程中具有很强的扩散性, DOT 重建需要求解的问题通常是病态和高度非线性的。由于非线性迭代方法的计算量很大, Lee 等^[35]提出了一种计算量较小的非迭代精确重建方法, 将该成像问题转化为联合稀疏恢复问题, 利用一般 MUSIC 规范和 CS 理论, 求得 l_0 范数最优解。

该算法有三大优点: ①与线性方法相似, 该算法的非迭代特性使计算过程无需求解数值扩散方程, 从而显著减少了计算时间; ②消除了高对比度光学不均匀性引起的波恩近似误差, 这种误差在线性方法中非常常见; ③与传统方法相比, 稀疏约束使重建问题的病态程度降低。此外, 现有线性方法常假设背景扰动很小, 而本方法没有使用这个假设, 因此也就不受限于线性方法的限制条件。另外, 利用 CS 理论进行光层析重建还可以利用混合 1、2 范数的惩罚条件, 通过适当的稀疏正则化, 将结构性先验知识引入 DOT 重建过程, 将问题转化为凸最优化问题求解, 加快迭代算法的收敛速度^[36]。

2.7 稀疏脑神经网络重建

偏相关是一种对脑神经网络的连通性测量, 但在测得数据数量 n 较小, 协方差数量 p 较大的条件 (the small- n large- p situation) 下, 很难得到对偏相关的准确估计。稀疏约束的引入可以简化问题的求解过程, Lee 等^[37]提出了一种新方法, 利用含有 l_1 范数惩罚项的稀疏线性回归, 即最小绝对值收缩与选择方法 (least absolute shrinkage and selection operator, LASSO), 来估计稀疏脑部连通性。根据 CS 理论, 即便测量数据很少并含有噪声, 也可以通过 LASSO 获得精确稀疏重建。本文对这一方法进行了实验验证, 采用来自自闭症谱系障碍患儿和健康儿童对照组的 FDG-PET 数据, 重建了含有 97 个 ROI 区域的稀疏脑神经网络, 重建结果验证了算法的可靠性。

3 基于 CS 理论的字典学习方法

CS 理论证明了如果信号在某个变换域内是稀疏的或可压缩的, 就能够通过测量矩阵(测量矩阵与变换矩阵非相干)将变换系数线性投影为低维观测向量, 这种投影能够保留重建信号所需的必要信息。接下来通过求解稀疏最优化问题来获得高维重建信号。因此利用 CS 理论重建图像需要解决三个问题: ①设计具有稀疏表示能力的过完备字典; ②获得满足非相干性或等距约束性准则的测量矩阵; ③建立快速鲁棒的信号重建算法。其中过完备字典的设计, 是利用 CS 理论重建图像的基础。目前设计过完备字典的方法主要有两种: 人工构造和训练学习。因为非自适应的 CSMRI 受限于一定的欠采样水平, 而自适应字典能够使算法达到更高的稀疏度和欠采样水平, 所以字典学习作为设计自适应字典的有效手段, 得到了广泛关注。

根据 CS 理论, 欠采样的图像重建问题可以表述为: 在 l_0 范数约束下近似求解欠定的线性方程 $F_u = y$, 其中 F_u 是欠采样傅立叶矩阵(以 MRI 中的采样数据为例, 在 CT 重建中为投影矩阵)。数学表达式为:

$$\min_x \|\Psi x\|_0 \quad \text{s.t.} \quad F_u x = y \quad (3)$$

此问题被称为稀疏编码问题, 是一个 NP-hard 问题, 可以用贪婪算法, 例如, OMP (Orthogonal Matching Pursuit)^[38] 来近似求解它。此外, 也可以用 l_1 范数条件代替 l_0 范数条件, 这样问题就可以通过线性规划(实域中)或二阶锥规划(复数域中)来求解^[39]。当测量值有噪声时, 可以采用基追踪去噪法^[40]来消除噪声。

本节将重点介绍一种基于字典学习(Dictionary Learning)的图像重建方法及其具体算法过程。这种算法能够使字典具有自适应能力, 从而提高重建结果的质量。

设原始待重建图像可表示为 $x \in C^P$, $x_{ij} \in C^n$ 是大小为 $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ 像素的图像块的向量表示。用图像块的左上角坐标 (i, j) 来标记该向量。 $D \in C^{n \times K}$ 表示以图像块为基的字典。字典 D 有 K 列, 每一列为一个 n 维向量, 代表一个 $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ 的基本图像块。如果每个 x_{ij} 可以由字典列的一个线性组合 $D\alpha_{ij}$ 来近似表示, 其中 $\alpha_{ij} \in C^{n \times K}$ 是稀疏的, 则称 α_{ij} 是关于字典 D 的 x_{ij} 的稀疏表示。

字典学习方法要解决的问题可以表述如下:

$$\min_{D, \Gamma} \sum_{i,j} \|R_{ij}x - D\alpha_{ij}\|_2^2 \quad \text{s.t.} \quad \|\alpha_{ij}\|_0 \leq T_0, \forall i, j \quad (4)$$

其中, $R_{ij} \in C^{n \times P}$ 表示从原始图像 x 中获得图像块 x_{ij} 的操作, 即 $R_{ij}x = x_{ij}$ 。 l_0 范数条件 $\|\alpha_{ij}\|_0 \leq T_0, \forall i, j$ 用以约束稀疏表示的稀疏水平, T_0 表示所要求的稀疏水平。 Γ 表示 $\{\alpha_{ij}\}_{ij}$, 即稀疏表示集。

字典学习问题是一个 NP-hard 问题, 因为当 D 和 x 固定时, 它就变成了稀疏编码问题。同时, 即使对 l_0 范数条件做凸松弛处理, 字典学习的最优化问题仍然是非凸的, 这使得问题更加难以求解。目前用来近似求解该问题的算法有很多, 这些算法的共同特征是交替寻找字典 D 和稀疏表示 Γ ^[41-44]。KSVD 是其中应用比较广泛的一种算法, 这种算法的特点是:

在字典更新过程中， D 的每一列和它在 α_{ij} 中对应的系数同时更新^[41]。字典学习问题的求解目标有两点：①建立一个自适应字典，使重建图像块的稀疏表示满足 L_0 范数约束条件，并使重建结果与测得的 k 空间数据相一致；②避免出现伪影。据此，该问题要求解的方程可以表述如下：

$$(P0) \quad \min_{x,D,\Gamma} \sum_{i,j} \| R_{ij}x - D\alpha_{ij} \|_2^2 + \nu \| F_u x - y \|_2^2 \quad \text{s.t.} \quad \mu(D) \leq c_0, \| \alpha_{ij} \|_0 \leq T_0, \forall i, j \quad (5)$$

上式中第一项用以衡量 $D\alpha_{ij}$ 近似 x_{ij} 的水平，第二项用以确保重建结果与 k 空间数据相一致。

在第二项的相对权重 $\nu = \frac{\lambda}{\sigma}$ 中， λ 是一个正的常数， σ 是衡量噪声水平的参数。

当 $\sigma \rightarrow 0, \nu \rightarrow \infty$ 时，表示噪声水平降低，第二项的作用增强。当噪声水平趋近于 0 时，测量结果 y 与重建结果 x 之间的关系趋近于 $F_u x = y$ 。 $\mu(D)$ 表示字典列之间的相干度，字典各列之间的非相干性越好，字典学习算法的效果就越好^[45]。

此外，再引进一个参数 r ，用来衡量图像块的重叠度。 r 定义为相邻图像块对应像素之间的距离（以像素为单位）。例如当 $r=1$ 时，各图像块之间有最大的重叠度，此时除图像右边界和下边界处的像素外，每个像素 (i, j) 均为一个图像块的左上角。假设图像边界由图像块环绕而成，那么右边界和下边界的每个像素也可以当作一个图像块的左上角。此时，每个像素属于 n 个不同的图像块。

(P0) 问题的求解过程是一个交替最小化的过程：第一步固定 x ，对字典和稀疏表示进行优化；第二步，固定字典和稀疏表示，更新重建结果 x ，以满足与测量数据的一致性。如果所得重建结果不满足要求，那么返回第一步重复这一过程，直到所得结果达到要求。具体算法过程如下：

步骤一：字典学习，固定 x ，求解 D 和 α_{ij} 。在这一步中问题 (P0) 可以转化为：

$$(P1) \quad \min_{D,\Gamma} \sum_{ij} \| R_{ij}x - D\alpha_{ij} \|_2^2 \quad \text{s.t.} \quad \mu(D) \leq c_0, \| d_k \|_2 = 1 \forall k, \| \alpha_{ij} \|_0 \leq T_0 \forall i, j \quad (6)$$

求解 (P1) 问题的主要目的是用有限个字典列（数量少于 T_0 ）的线性组合来近似表示 x_{ij} ，同时要求字典列归一化，各列之间的相干度小于 c_0 。 x 的初始值可以由 $x = x_0 = F_u^H y$ 给出， y 为 k 空间采样得到的数据。

当不引入非相干约束条件 $\mu(D) \leq c_0$ 时，字典学习过程与 KSVD 算法的具体过程相同，本算法与 KSVD 的主要区别在于本算法在字典更新过程中要确保字典 D 满足 $\mu(D) \leq c_0$ 。当字典学习完成后，稀疏编码也就相应的完成了。

步骤二：更新重建结果，固定字典 D 和稀疏表示 α_{ij} ，求解 x 。

相应的问题表达式为：

$$(P2) \quad \min_x \sum_{ij} \| R_{ij}x - D\alpha_{ij} \|_2^2 + \nu \| F_u x - y \|_2^2 \quad (7)$$

第一项用以衡量字典列和稀疏表示对于图像块的近似水平，第二项为数据保存项，用以确保重建结果与测量结果相一致。(P2) 问题可以转化为：

$$M = \sum_{ij} \| R_{ij}x - D\alpha_{ij} \|_2^2 + \nu \| F_u x - y \|_2^2, \quad \frac{dM}{dx} = 0$$

整理上式可以得到:

$$\left(\sum_{ij} R_{ij}^T R_{ij} + \nu F_u^H F_u \right) x = \sum_{ij} R_{ij}^T D\alpha_{ij} + \nu F_u^H y \quad (8)$$

上标 H 表示厄米共轭, 当操作数为实数时, H 可由 T 代替。

如上所述, R_{ij} 表示从 x 中获得 x_{ij} 的过程, 那么 R_{ij}^T 表示其逆过程, 即将大小为 $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ 的图像块填回到大小与 x 相同的空白图像中。当 $r=1$ 并满足边界环绕假设时, 从原始图像中依次取图像块的步长为一个像素, 所以图像块填回到空白图像中时必然存在重叠, 所以 $\sum_{ij} R_{ij}^T R_{ij} = \beta I_p$, I_p 为 P 维单位矩阵, $\beta=n$ 。当不满足边界环绕假设时, 由于图像边界像素数量远小于图像内部像素数量, 所以 $\sum_{ij} R_{ij}^T R_{ij} \approx \beta I_p$ 。事实上, 边界环绕假设已经被证明可以应用于字典设计^[46]。同样由于重叠, $\frac{1}{\beta} \sum_{ij} R_{ij}^T D\alpha_{ij}$ 表示由字典列和稀疏表示近似得到的重建结果。利用傅立叶变换对方程 (8) 做进一步的化简。定义 $F \in C^{P \times P}$ 表示全傅立叶编码矩阵, $F^H F = I_p$ 。所以 Fx 表示全部 k 空间数据, 则方程 (8) 可变换为:

$$\left(F \sum_{ij} R_{ij}^T R_{ij} F^H + \nu F F_u^H F_u F^H \right) Fx = F \sum_{ij} R_{ij}^T D\alpha_{ij} + \nu F F_u^H y \quad (9)$$

其中 $FF_u^H F_u F^H$ 是一个对角矩阵, 对角线上的元素只有 0 和 1 两种取值, 值为 1 的位置对应于采样时被采到的频率, 值为 0 的位置对应于未被采到的频率。 FF_u^H 也是一个对角矩阵, 对角线上的元素也只有 0 和 1 两种取值, 值为 1 的位置对应于采样中被采到的频率, 值为 0 的位置对应于未被采到的频率。对于等号左边括号里的第一项可以有如下化简过程:

$$F \sum_{ij} R_{ij}^T R_{ij} F^H = F(\beta I_p) F^H = \beta I_p$$

设 $S = \frac{F \sum_{ij} R_{ij}^T D\alpha_{ij}}{\beta}$, 那么对于采样中未被采到的频率 (k_x, k_y) ((k_x, k_y) 表示 k 空间中的坐标), (9) 可以化简为:

$$\beta Fx(k_x, k_y) = F \sum_{ij} R_{ij}^T D\alpha_{ij}(k_x, k_y) \quad (10)$$

最终得到:

$$Fx(k_x, k_y) = S(k_x, k_y) \quad (11)$$

对于采样中被采到的频率 (k_x, k_y) , (9) 可以化简为:

$$(1+\nu) Fx(k_x, k_y) = S(k_x, k_y) + \nu S_0(k_x, k_y) \quad (12)$$

(12) 式中 $\nu = \frac{\lambda'}{\sigma} = \frac{\lambda/\beta}{\sigma}$, $S_0 = FF_u^H y$ 表示 0 填充的 k 空间测量数据。最终得到:

$$Fx(k_x, k_y) = \frac{S(k_x, k_y) + \nu S_0(k_x, k_y)}{1 + \nu} \quad (13)$$

所以 (P2) 问题的求解结果可以表示为:

$$Fx(k_x, k_y) = \begin{cases} S(k_x, k_y), & (k_x, k_y) \notin \Omega \\ \frac{S(k_x, k_y) + \nu S_0(k_x, k_y)}{1 + \nu}, & (k_x, k_y) \in \Omega \end{cases} \quad (14)$$

式中 Ω 代表 k 空间中采样数据的集合, $Fx(k_x, k_y)$ 表示 (k_x, k_y) 点的更新值。对于采样时未被采到的频率, 上式用字典插值来表示更新值; 对于采到的频率, 上式将采样频率填回, 也就是 (14) 中的 $S_0 = FF_u^H y$ 项, 考虑到噪声, 该项前乘以一个与噪声水平相关的权重, 同时用字典和稀疏表示来修正噪声造成的伪影。用这样的方法, 上式实现了 $Fx(k_x, k_y)$ 的更新。最后, 更新后的重建结果 x 由 Fx 经过 IFFT 得到。在具体应用中这种算法的收敛性很好, 而且能够在高倍欠采样情况下得到高质量的图像^[47]。

至此完成一次迭代, 如果重建得到的 x 不能满足对图像质量的要求, 可以进行多次迭代, 直至得到的重建结果满足要求为止。以上就是字典学习的算法过程, 算法的整体框架如图 1 所示:

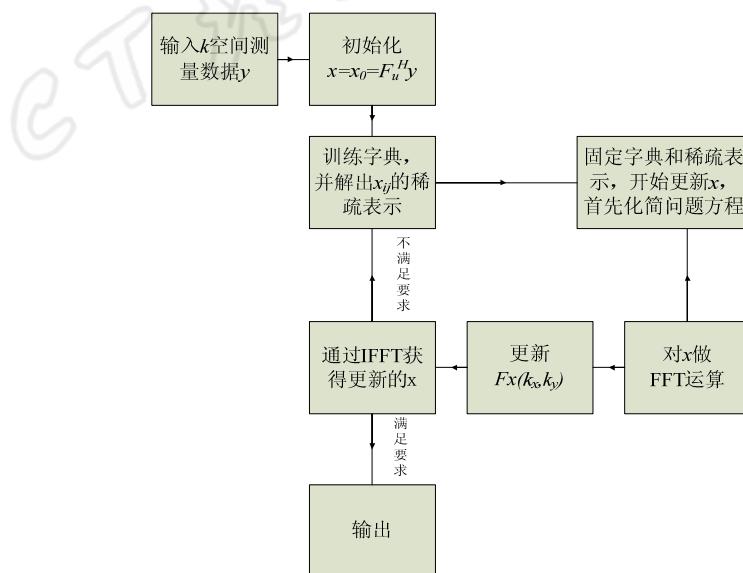


图 1 字典学习算法框架图

Fig. 1 The framework of dictionary learning algorithm

4 字典学习在 CT 成像中的应用

4.1 字典学习算法在 CT 重建中的实现

上一节中的算法是以 MRI 图像重建为例进行介绍的, 如果要在 CT 图像重建中应用这种重建算法, 则需要对算法做相应改动: ①将算法过程中的正向傅立叶变换替换为 CT 投影变换; ②傅立叶逆变换替换为 CT 重建过程, 例如 ART 迭代。

第一步: 根据投影数据通过 ART 变换获得初始图像:

$$\bar{f}_0 = \beta \bar{M} \frac{g_i}{\bar{M}_t \cdot \bar{M}_t} \quad (15)$$

其中, \bar{f}_0 表示初始图像, g_i 表示由 CT 投影变换获得的原始数据。

第二步: 根据上一节介绍的算法, 对图像做分块处理(获得 \bar{f}_{ij}), 更新字典和重建结果。

第三步: 根据重建得到的图像获得下一轮迭代的初始图像(n 表示迭代次数):

$$\bar{f}_n = \bar{f}_{n-1} + \beta \bar{M} \frac{g_i - \bar{M}_t \cdot \bar{f}_{n-1}}{\bar{M}_t \cdot \bar{M}_t} \quad (16)$$

上述算法的伪代码如下:

INPUT:

过完备词典 φ , 列数为 N_d

1: $N_l=63$, $N_d=200$, $T_0=30\%$ N_0 (每行、列 patch 个数), N_d (ART 迭代次数), T_0 (稀疏水平)

2: for $i=1$, N_d

3: $\bar{f} = \bar{f} + \beta \bar{M} \frac{g_i - \bar{M}_t \cdot \bar{f}}{\bar{M}_t \cdot \bar{M}_t}$ ART

4: $\bar{f}_{ij} = R_{ij} \bar{f}$

5: 初始化: 剩余值 $r_0 = \bar{f}_{ij}$, 索引集 $\Lambda_t = \Lambda_{t-1} \cup \{\lambda\} = \emptyset$, 词典集 $\Psi = \emptyset$

6: for $t=1$, N_s do:

7: 找到系数 λ , 使得 $\bar{f}_{ij} \cdot \varphi_\lambda = \max_{1 \leq l \leq N_d} (\bar{f}_{ij} \cdot \varphi_\lambda)$

8: $\Lambda_t = \Lambda_{t-1} \cup \{\lambda\}$, $\Psi_t = [\Psi_{t-1}, \varphi_\lambda]$

9: 用最小二乘法求得 $\min \| \bar{f}_{ij} - \Psi_t x_t \|_2$ 的解 x_t

10: 更新剩余值 $r = \bar{f}_{ij} - \Psi_t x_t$

11: end

12: $\bar{f} = R_{ij}^T \bar{f}_{ij}$

13: end

14: return \bar{f}

4.2 数值仿真结果

在仿真实验中使用了 Shepp-Logan 头模型以及一张羊脑腔的 CT 图像, 利用了离散数值

采样技术。头模型大小为 256×256 个像素，像素尺寸为 0.78125 mm ；羊脑腔 CT 图像大小为 512×512 个像素，像素尺寸为 0.39063 mm 。X 光源到旋转中心的距离为 400 mm ，探测器到旋转中心的距离为 400 mm ，采用等距扇束采样方式，在 360° 范围内每间隔 1° 采集一个角度投影。探测器单元个数为 512 个，单元大小为 1 mm 。头模型的重建图像大小为 256×256 个像素，羊脑腔 CT 图像的重建图像大小为 512×512 个像素。仿真实验的示意图（以羊脑腔 CT 图像的重建为例）如图 2 所示：

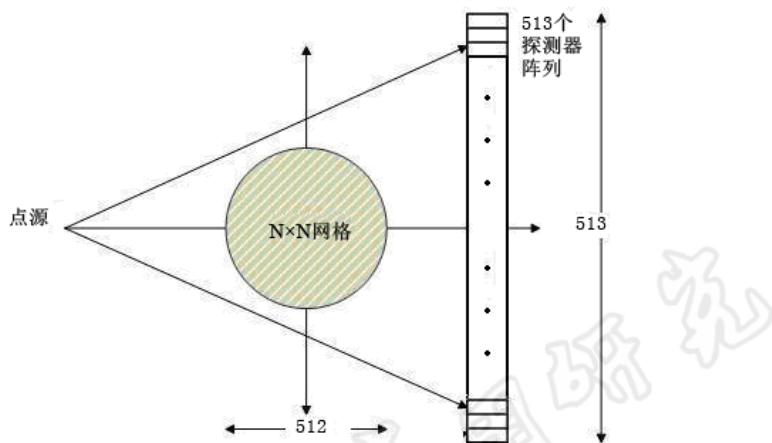


图 2 仿真实验示意图
Fig. 2 The Scheme of the Experiment

图 3 为原始图像及采用字典学习重建方法获得的重建结果。其中图 3(a)是 Shepp–logan 头模型原始图像。图 3(b) 是根据完全数据得到的头模型重建图像，迭代次数为 20 次。图 3(c) 是羊脑腔原始 CT 图像。图 3(d) 到图 3(h) 均为羊脑腔原始 CT 图像的重建图像，其中图 3(d) 是采用 ART 变换得到的重建结果，图 3(e) ~ (h) 是采用字典学习方法得到的重建结果。图 3(d) ~ (h) 的采样角度均为 360° 内 60 个，即每 6° 一个投影；迭代次数均为 20 次。用 T_0 表示稀疏水平，图 3(e) 的重建过程中 $T_0=10$ ，图 3(f) 的重建过程中 $T_0=15$ ，图 3(g) 的重建过程中 $T_0=17$ ，图 3(h) 的重建过程中 $T_0=20$ 。通过比较可以发现，相比于 ART 变换得到的重建图像，通过字典学习方法得到的重建图像的质量有所提高。

为客观评价不同方法及稀疏水平在图像重建性能上的好坏，我们使用均方误差（Mean Square Error, MSE）和全局信噪比（SNR）来评估我们的方法。

分别对图 3 中的 6 个重建图像计算其 MSE 值和全局 SNR 值，计算结果见表 1。可以看到，根据 Shepp–logan 头模型完全数据进行重建得到的图像（图 3(b)），其 MSE 值和全局 SNR 值都较好，说明了字典学习算法具有很好的重建能力和去噪能力。对比图 3(d)、图 3(e)、图 3(f)、图 3(g)、图 3(h) 的 MSE 值和全局 SNR 值，可以发现，相比于单纯的 ART 重建算法，字典学习算法在重建图像质量方面具有一定的优势。而且字典学习算法的效果与稀疏水平 T_0 的选择有很大关系，如果选择了较为合适的 T_0 ，重建图像的质量将得到进一步地提升。

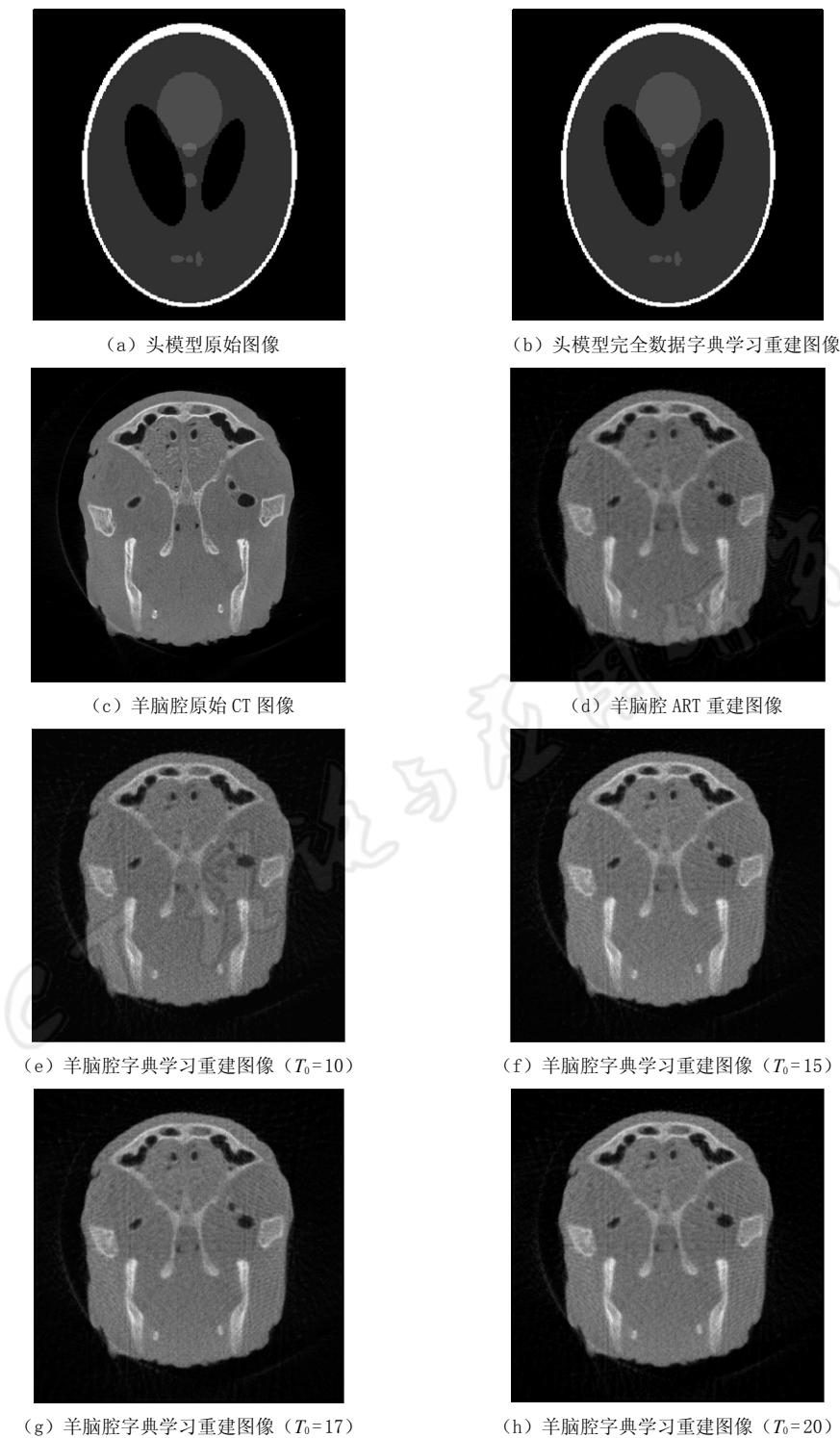


图3 仿真重建结果
Fig. 3 The results of the experiment

表 1 对应于图 3 中各重建图像 (b)、(d)、(e)、(f)、(g)
和 (h) 的 MSE 和全局 SNR 值

Table 1 MSE and SNR of the reconstructioned images in Fig. 3

图像量化指标	图 3 (b)	图 3 (d)	图 3 (e)	图 3 (f)	图 3 (g)	图 3 (h)
MSE ($\times 10^{-2}$)	0.252 1	0.379 3	0.351 3	0.318 5	0.311 3	0.306 2
全局 SNR	31.528 2	14.645 3	15.232 3	16.115 6	16.318 9	16.467 0

5 讨论与总结

国内外学者对 CS 理论在医学图像重建中的应用已经做了大量的研究，并取得了较显著的成果，特别是在降低辐射成像的剂量方面，基于 CS 理论的各类方法有着突出的表现，在大幅减少测量数据的情况下，仍然能够很好地保持原始待重建图像的主要信息。本文介绍了 CS 理论在医学成像领域应用的一些最新进展，并针对基于字典学习的 CS 成像方法进行了详细论述。由于字典学习方法的应用，使字典具备了自适应能力，从而进一步提高了重建图像质量的潜力。字典学习作为 CS 理论的一种应用形式，本身还存在很多需要完善的地方，特别是在 CT 成像领域，还需要做进一步地研究和探索。

参考文献

- [1] Candès E. Compressive sampling[C]//International congress of mathematicians. Madrid, Spain, 2006.
- [2] Tao T, Candès E. Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(12): 5406–5425.
- [3] Donoho DL. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289–1306.
- [4] Nowak RD, Wright SJ, Figueiredo MT. Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems[J]. IEEE Journal on Selected Topics in Signal Processing, 2007, 1(4): 586–597.
- [5] Figueiredo MT, Nowak RD, Wright SJ. Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems[J]. Selected Topics in Signal Processing, IEEE Journal of, 2007, 1(4): 586–597.
- [6] Daubechies I, Defrise M, Mol CD. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2004, 57(11): 1413–1457.
- [7] Thomas B, Davies EM. Iterative hard thresholding for compressed sensing[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2009, 27(3): 265–274.
- [8] Gilbert AC, Guha S, Indyk P, et al. Near-optimal sparse Fourier representations via sampling[C]//2002 ACM Symposium on Theory of Computing. Montreal, Quebec, Canada, 2002.
- [9] Takhar D, Laska J, Wakin M, et al. A new compressive imaging camera architecture using optical-domain compression[C]//SPIE Electronic Imaging. San Jose, California, 2006.
- [10] Takhar D, Bansal V, Wakin M, et al. A compressed sensing camera: New theory and an implementation using digital micromirrors[C]//SPIE Electronic Imaging: Computational Imaging. San Jose, California, 2006.
- [11] Wakin MB, Laska J. Compressive imaging for video representation and coding[C]//Picture

- Coding Symposium(PCS): Beijing, China, 2006.
- [12] Haupt J, Bajwa UW, Rabbat M, et al. Compressed sensing for networked data: A different approach to decentralized compression[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 92-101.
- [13] 练秋生, 郝鹏鹏. 基于压缩传感和代数重建法的CT图像重建[J]. 光学技术, 2009, 35(3): 422-425.
Lian QR, Hao PP. Image reconstruction for CT based on compressed sensing and ART[J]. Optical Technique, 2009, 35(3): 422-425.
- [14] 刘长红, 杨扬, 陈勇. 基于压缩传感的手写字符识别方法[J]. 计算机应用, 2009, 29(8): 2080-2082.
Liu CH, Yang Y, Chen Y. Handwritten character recognition based on compressive sensing[J]. Journal of Computer Applications, 2009, 29(8): 2080-2082.
- [15] 李波, 谢杰镇, 王博亮. 基于压缩传感理论的数据重建[J]. 计算机技术与发展, 2009, 19(5): 23-25, 29.
Li B, Xie JZ, Wang BL. Signal reconstruction based on compressed sensing[J]. Computer Technology and Development, 2009, 19(5): 23-25, 29.
- [16] 傅迎华. 可压缩传感重构算法与近似QR分解[J]. 计算机应用, 2008, 28(9): 2300-2302.
Fu YH. Reconstruction of compressive sensing and semi-QR factorization[J]. Journal of Computer Applications, 2008, 28(9): 2300-2302.
- [17] 杨海蓉, 张成, 丁大为, 等. 压缩传感理论与重构算法[J]. 电子学报, 2011, 39(1): 142-148.
Yang HR, Zhang C, Ding DW, et al. The theory of compressed sensing and reconstruction algorithm[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(1): 142-148.
- [18] Liu FX, Ye ZF, Wang X, et al. Texture recognition and segmentation via sparse representation[C]//International Conference on Information and Industrial Electronics. Chengdu, China, 2011.
- [19] Li DR, Lv XH, Zeng SQ, et al. Beam spot size evolution of a Gaussian beam after angular dispersion[J]. Optics Letters, 2008, 33(2): 128-130.
- [20] 刘丹华, 石光明, 周佳社, 等. 基于Compressed Sensing框架的多描述编码方法[J]. 红外与毫米波学报, 2009, 28(4): 298-302.
Liu DH, Shi GM, Zhou JS, et al. New method of multiple description coding for image based on compressed sensing[J]. Journal of Infrared and Millimeter Waves, 2009, 28(4): 298-302.
- [21] 李树涛, 魏丹. 压缩传感综述[J]. 自动化学报, 2009, 35(11): 1369-1377.
Li ST, Wei D. A survey on compressive sensing[J]. Acta Automatica Sinica, 2009, 35(11): 1369-1377.
- [22] 石光明, 刘丹华, 高大化, 等. 压缩感知理论及其研究进展[J]. 电子学报, 2009, 37(5): 1070-1081.
Shi GM, Liu DH, Gao DH, et al. Advances in theory and application of compressed sensing[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(5): 1070-1081.
- [23] 喻玲娟, 谢晓春. 压缩感知理论简介[J]. 电视技术, 2008, 32(12): 16-18.
Yu LJ, Xie XC. Brief introduction of compressed sensing theory[J]. Video Engineering, 2008, 32(12): 16-18.
- [24] Çukur T, Lustig M, Saritas EU, et al. Signal compensation and compressed sensing for magnetization-prepared MR angiography[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2011, 30(5): 1017-1027.
- [25] HU Y, Goud LS, Dibella E, et al. Accelerated dynamic mri exploiting sparsity and low-rank structure: k-t SLR[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2011, 30(5): 1042-1054.
- [26] Montefusco BL, Lazzaro D, Papi S, et al. A fast compressed sensing approach to 3d mr image reconstruction[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2011, 30(5): 1064-1075.
- [27] Ye XJ, Chen YM, Huang F. Computational acceleration for mr image reconstruction in partially parallel imaging[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2011, 30(5): 1055-1063.

- [28] Wang G, Yu HY DE B-man. An outlook on x-ray CT research and development[J]. *Medical Physics*, 2008, 35(3): 57-169.
- [29] Li L, Chen ZQ, Kang KJ, et al. Recent advance in exact ROI/VOI image reconstruction[J]. *Current Medical Imaging Reviews*, 2010, 6(2): 112-118.
- [30] Yu HY, Wang G. Compressed sensing based interior tomography[J]. *Physics in Medicine and Biology*, 2009, 54(9): 2791-2805.
- [31] Ye YB, Yu HY, Wei YC, et al. A general local reconstruction approach based on a truncated hilbert transform[J]. *International Journal of Biomedical Imaging*, 2007, Article ID 63634.
- [32] Hiroyuki K, Matias C, Frederic N, et al. Tiny a priori knowledge solves the interior problem in computed tomography[J]. *Physics in Medicine and Biology*, 2008, 53(9): 2207-2231.
- [33] Li L, Kang KJ, Chen ZQ, et al. A general region-of-interest image reconstruction approach with truncated Hilbert transform[J]. *Journal of X-ray Science and Technology*, 2009, 17(2): 135-152.
- [34] Yang JS, Yu HY, Jiang M, et al. High-order total variation minimization for interior tomography[J]. *Inverse Problems*, 2010, 26(3): 350131-3501329.
- [35] Xu Q, Mou XQ, Wang G, et al. Statistical interior tomography[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2011, 30(5): 1116-1128.
- [36] Okkyun L, Min K, Bresler Y, et al. Compressive diffuse optical tomography: Noniterative exact reconstruction using joint sparsity[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2011, 30(5): 1129-1142.
- [37] Baritaux CJ, Kai H, Martina B, et al. Sparsity-driven reconstruction for FDOT with anatomical priors[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2011, 30(5): 1143-1153.
- [38] Hyekyoung L, Soo LD, Hyejin K, et al. Sparse brain network recovery under compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2011, 30(5): 1154-1165.
- [39] Tropp AJ. Greed is good: Algorithmic results for sparse approximation[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2004, 50(10): 2231-2242.
- [40] Candès JE, Terence T. Decoding by linear programming[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005, 51(12): 4203-4215.
- [41] Donoho LD, Elad M, Temlyakov NV. Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(1): 6-18.
- [42] Aharon M, Elad M, Bruckstein A. K-SVD: An algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(11): 4311-4322.
- [43] Engan K, Hakon JH, Aase SO. Method of optimal directions for frame design[C]//IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1999. Proceedings, 1999 IEEE International Conference on, 5. Arizona, USA, 1999, 2443-2446.
- [44] Mehrdad Y, Thomas B, Davies EM. Dictionary learning for sparse approximations with the majorization method[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(6): 2178-2191.
- [45] Field DJ, Olshausen BA. Emergence of simple-cell receptive field properties by learning a sparse code for natural images[J]. *Nature*, 1996, 381(6583): 607.
- [46] Jackson IJ, Meyer HC, Nishimura GD, et al. Selection of a convolution function for Fourier inversion using gridding[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1991, 10(3): 473-478.
- [47] Michal A, Elad M. Sparse and redundant modeling of image content using an image-signature-dictionary[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2008, 1(3): 228-247.
- [48] Ravishankar S, Bresler Y. MR image reconstruction from highly undersampled k-Space data by dictionary learning[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2011, 30(5): 1028-1041.

New Advances of Compressed Sensing in Medical Image Reconstruction

JIAO Peng-fei, LI Liang[✉], ZHAO Ji

1. Department of Engineering Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China
2. Key Laboratory of Particle & Radiation Imaging, Ministry of Education,
Tsinghua University, Beijing 100084, China

Abstract: Compressed Sensing (CS) is a new signal acquisition and processing theory. It can decrease the signal sampling time and computation cost by reducing the required data for signal recovery while maintaining good image quality. The CS theory has drawn a lot of attention and made great progress in medical imaging since it was proposed. This paper introduces the history of CS theory and the recent improvement in medical imaging. Moreover, we focus on the dictionary learning algorithm which is a new CS-based adaptive reconstruction algorithm. At last, the result of simulation is presented to convince the algorithm.

Key words: compressed sensing; medical imaging; image construction; dictionary learning; K-SVD algorithm



作者简介: 焦鹏飞(1990—), 清华大学工程物理系本科学生, 主要从事CT成像数学算法及工程应用的学习和研究, Tel: 15011582993, E-mail: jpf900101@163.com; 李亮[✉](1981—), 助理研究员, 主要从事X射线成像物理、CT成像数学算法及工程应用等方面的研究, Tel: 010-83186049, E-mail: liliang02@mails.tsinghua.edu.cn。